

基于部分平行 ADMM 求解谱寻求问题的时频分析

胡园园, 罗 倩, 段中钰, 王嘉浩
(北京信息科技大学信息与通信工程学院, 北京 100020)

摘 要: 经典的非参数谱分析方法使用滑动窗口来捕捉大多数时间序列的频谱特性,然而这种方法不能很好地应用在时间序列的时频谱是时间连续的信号上. 对于一些其时频谱满足时间连续频率稀疏的非平稳信号,提出了一种利用部分平行交替方向乘法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)求解谱寻求问题用于此类信号的时频分析方法. 对一段加噪声的仿真信号和一段 EEG(脑电)信号使用提出的方法进行时频分析. 仿真结果表明:与短时傅里叶的分析方法相比,提出的方法不仅提高了时频谱的频率分辨率和时间分辨率,还有效抑制了噪声. 最后从 ADMM 算法停止准则的角度说明了算法的收敛.

关键词: 非参数谱分析; 滑动窗口; 部分平行 ADMM; 谱寻求; 时频分析; 频率分辨率; 时间分辨率
中图分类号: TN 911.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2019)11-2392-07
电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2019.11.022

Time-Frequency Analysis Based on Partly Parallel ADMM Solving Spectral Pursuit Problem

HU Yuan-yuan, LUO Qian, DUAN Zhong-yu, WANG Jia-hao
(School of Information and Communication Engineering, Beijing Information Science & Technology University, Beijing 100020, China)

Abstract: Classical nonparametric spectral analysis uses sliding windows to capture the dynamic nature of most real-world time series, however, this universally accepted approach fails to exploit the temporal continuity in the data. For some non-stationary signals that are smooth in time and sparse in frequency, a method of computing the spectrum pursuit estimate by using partly parallel alternating direction method of multipliers (ADMM) was used to obtain time-frequency analysis of this signal. A time-frequency analysis was performed on simulated and real human EEG data using the proposed method. The simulation results show that the proposed method not only effectively improves time and frequency resolution of the spectrum, but also effectively suppresses the noise than short-time Fourier transform. Finally, the convergence of the algorithm was illustrated from the perspective of stopping criterion of ADMM algorithm.

Key words: nonparametric spectral analysis; sliding windows; partly parallel Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM); spectrum pursuit; time-frequency analysis; frequency resolution; time resolution

1 引言

非参数时频分析方法广泛应用于分析现实中的非平稳信号,傅里叶变换,小波变换,以及 Gabor 变换等经典的非参数时频分析方法采用滑动窗口的方法来分析信号的变化,尽管滑动窗口的方法是广泛采用的,但是其有以下缺点:首先,给定窗口的频谱变换没有完全捕获相邻窗口的频谱变化特征,因此得到的频谱不能完全捕捉信号

时频谱中频率随时间平滑变化的特性,这是因为时间平滑性可能隐含在各个窗口的非重叠区域中.其次,窗函数的引入也会对信号的真实频谱造成一定的影响,从而导致谱泄露的问题.最后,测不准原理对由傅里叶变换分析的信号的时频谱的频率分辨率施加了严格的限制,因为频率分辨率与分析窗长度成反比,当信号的局部平稳长度小于滑动窗口的长度时,滑动窗口法就会失效^[1].

在许多研究中,例如语音信号处理,脑电信号(E-

lectroencephalogram, EEG) 研究^[2], 以及文献^[3]经验模态分解的应用中, 一个共同的目标就是计算时间平滑(连续)和频率稀疏的时频谱表示, 有必要提出一种用于专门实现时间平滑性和频率稀疏性的频谱估计方法. 另外, 批量时间序列分析在许多应用中也很常见^[2-4], 尽管批量分析使用时间序列中的所有数据来估计每个时间点的时频表示, 由于采取了整段时间序列估计信号频率系数的优化方法, 可以同时提高信号的时间分辨率与频率分辨率^[4].

对于时频谱满足时间连续频率稀疏的信号, 依据贝叶斯估计的思想, 采用批量时间序列的分析方法, 将信号频率系数的变换问题转换为一个估计问题, 通过将信号估计问题建模为优化问题并将各种稀疏惩罚函数加入到优化问题的目标函数中得到信号的最佳估计^[5-8]. 谱寻求法将时域信号的频域分析问题建模成一个凸优化问题^[4], 与经典 ADMM 算法求解谱寻求优化问题^[9,10]相比, 在乘子部分并行的情况下, 实现了与前者相当的收敛效果. 本文将部分平行 ADMM 这一分布式优化方法应用于求解谱寻求优化问题, 最终得到原问题的最大后验概率解. 本文将介绍谱寻求优化模型的建立过程及使用部分平行 ADMM 的求解过程, 并对一段仿真信号和一段 EEG 信号分别使用短时傅里叶变换和部分平行 ADMM 求解的谱寻求法进行时频分析, 仿真结果表明这种方法与经典的短时傅里叶分析方法相比, 不仅提高了谱的分辨率, 很好地反映了信号的动态变化, 而且有效地抑制了噪声. 最后从 ADMM 算法收敛准则的角度分析了部分平行 ADMM 算法求解的仿真信号的收敛情况.

2 谱寻求优化模型建立

2.1 代价函数

对时间序列 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^T$ 进行时频分析就是先将信号用窗函数分段, 然后求取每个时间窗内信号的频率系数 $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^K$, 其中 n 表示第 n 个时间窗的序号; K 为每个时间窗的频率系数的数量; T 为时间序列的长度. 如果将时间序列 \mathbf{y} 分为每段长度为 M 的 N 段, 则整个信号待求的频率系数可以用矩阵表示为 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{K \times N}$. 根据傅里叶反变换的原理, 时间序列的第 n 个时间窗为:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{F}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \quad (1)$$

式中 $\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{v}_n \sim N(0, \sigma^2)$, 即均值为 0, 方差为 σ^2 的高斯噪声, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{M \times K}$ 为实数傅里叶反基矩阵, 傅里叶反基矩阵中的元素为:

$$F_{m,k} = \cos(2\pi mk/K), F_{m,k+K/2} = \sin(2\pi mk/K),$$

其中 $k=0, 1, \dots, K/2; m=0, 1, \dots, M-1$.

使用统计学的方法, 通过对时间序列加入随机扰动, 把求取时间序列频率系数的问题转化成以下 ℓ_2 范

数优化问题:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{y}_n - \mathbf{F}\mathbf{x}_n\|_2^2 \quad (2)$$

上述问题可以等价为一个最小二乘的问题, 如果求其闭式解, 会得到 \mathbf{y}_n 的离散时间傅里叶变换, 这从贝叶斯推理的角度讲得到的是原问题的最大似然估计, 可以通过加入一个反映信号先验特征的惩罚函数得到原问题的最大后验估计^[11].

2.2 惩罚函数

谱寻求优化模型的惩罚函数的选取考虑了如 EEG 信号, 神经刺激信号, 语音等信号的时频域特征, 即信号在频率域具有稀疏性, 而频率随时间的变化是连续的^[4]. 该惩罚函数定义了惩罚矩阵 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{K \times N}$, 它的每一列定义为 $\mathbf{w}_n \triangleq \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}$, 惩罚函数的构造如下:

$$\varphi(\mathbf{w}) = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{w}_{k,n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

式中 N 为待分析时间序列的时窗数; K 为每个时窗的频率系数的数量. 内层求和可以看成是在给定频带上随时间变化的频率系数的 ℓ_2 范数(保证频率随时间变化的连续性), 外层求和可以看成是各个频带的 ℓ_1 范数(保证频率稀疏性).

通过加入控制惩罚函数在优化问题中所占比例的参数 β , 估计时间序列频率系数的优化问题描述如下:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}, \mathbf{w}}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{n=1}^N \|\mathbf{y}_n - \mathbf{F}\mathbf{x}_n\|_2^2 + \beta\varphi(\mathbf{w}) \right) \\ \text{s. t. } \mathbf{w}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

3 使用部分平行 ADMM 求解谱寻求优化问题

目标函数式(4)的两项都含有未知参数, 而约束条件使得未知参数 \mathbf{x} 和 \mathbf{w} 不能以分离的方式求解, 但是部分平行 ADMM 的使用可以将全局问题分解为较小子问题来进行分离和迭代求解. 部分平行 ADMM 通过引入辅助变量 \mathbf{z}_n , 来使目标函数式(4)两项中的未知参数 \mathbf{x} 和 \mathbf{w} 可以分离求解. 以下为了描述简洁, 用 $l_n(\mathbf{x}_n)$ 代替目标函数式(4)中的 $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{F}\mathbf{x}_n\|_2^2$. 引入辅助变量后的优化问题描述如下:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}, \mathbf{w}}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{n=1}^N l_n(\mathbf{x}_n) + \beta\varphi(\mathbf{w}) \right) \\ \text{s. t. } \mathbf{x}_n = \mathbf{z}_n, \mathbf{w}_n = \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

定义 $\mathbf{c}_n \triangleq \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1} - \mathbf{w}_n$, $\mathbf{d}_n \triangleq \mathbf{z}_n - \mathbf{x}_n$. 显然问题的约束变为 $\mathbf{c}_n = \mathbf{d}_n = 0$. 使用这种表示, 引入惩罚参数为 ρ 的增强拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w}, \lambda, \alpha) = \beta\varphi(\mathbf{w}) + \sum_{n=1}^N l_n(\mathbf{x}_n) \\ + \lambda_n^T \mathbf{c}_n + \alpha_n^T \mathbf{d}_n + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{c}_n\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{d}_n\|_2^2 \quad (6) \end{aligned}$$

式中 λ_n, α_n 分别为拉格朗日乘子矩阵 $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}^{N \times K}$ 的第 n 列. 使用部分平行 ADMM 技术, 将乘子 z 和 w 进行并行更新, 并作一次校正, 其它乘子交替更新, 那么待估计时间序列的频率系数 x_n 可以通过交替地迭代地更新每个乘子来求解:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^{(m+1)} &= \arg \min_{\mathbf{x}} L_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{w}^{(m)}, \lambda^{(m)}, \alpha^{(m)}) \\ \mathbf{z}^{(m+1)} &= \arg \min_{\mathbf{z}} L_{\rho}(\mathbf{x}^{(m+1)}, \mathbf{z}, \mathbf{w}^{(m)}, \lambda^{(m)}, \alpha^{(m)}) \\ \mathbf{w}^{(m+1)} &= \arg \min_{\mathbf{w}} L_{\rho}(\mathbf{x}^{(m+1)}, \mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{w}, \lambda^{(m)}, \alpha^{(m)}) \\ \lambda_n^{(m+1)} &= \lambda_n^{(m)} + \rho(\mathbf{z}_n^{(m+1)} - \mathbf{z}_n^{(m)} - \mathbf{w}_n^{(m+1)}) \\ \alpha_n^{(m+1)} &= \alpha_n^{(m)} + \rho(\mathbf{z}_n^{(m+1)} - \mathbf{x}_n^{(m+1)}) \\ \mathbf{v}^{(m+1)} &= \mathbf{v}^{(m)} - c(\mathbf{v}^{(m)} - \mathbf{v}^{(m+1)}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 m 为迭代次数. $\mathbf{v} = (z, w, \lambda, \alpha)$, $\mathbf{v}^{(m)}$ 为上次迭代的各乘子的值, $\mathbf{v}^{(m+1)}$ 为本次迭代各乘子的值, 校正参数 $c = 0.875$. 通过部分平行 ADMM 算法, 将时间序列频率系数的估计问题转化为 5 个子问题的求解. 本文所述的并行并非真正意义的并行, 只是说 w 乘子更新没有使用当次迭代的 z 乘子的值, 而是使用了前一次迭代中 z 的值. 如果涉及数据量较大时, 在分布式计算框架如 MapReduce 下, 就可以首先更新 x , 然后平行更新 z 和 w , 最后平行更新 λ 和 α . 下面将描述前三个乘子 x, z, w 的优化过程.

(1) x 更新过程

对 x 的更新中不涉及变量 w , 因此式(7)中的 x 的更新式可写为:

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \arg \min_{\mathbf{x}} \sum_{n=1}^N l_n(\mathbf{x}_n) + \alpha_n^{(m)\top} (\mathbf{z}_n^{(m)} - \mathbf{x}_n) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{z}_n^{(m)} - \mathbf{x}_n\|_2^2 \quad (8)$$

特定时间窗的频率系数的更新可写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n^{(m+1)} &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y}_n - \mathbf{F}\mathbf{x}_n\|_2^2 + \alpha_n^{(m)\top} (\mathbf{z}_n^{(m)} - \mathbf{x}_n) \\ &\quad + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{z}_n^{(m)} - \mathbf{x}_n\|_2^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}_n} \|\mathbf{x}_n + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b}\|_{\mathbf{C}^{-1}}^2 \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{C} \triangleq \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \frac{\rho}{2} \mathbf{I}$, $\mathbf{b} \triangleq -\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{y}_n + \alpha_n^{(m)} + \rho \mathbf{z}_n^{(m)})$,

由上式可以得出: 特定时间窗频率系数的更新问题转换为权重矩阵为 \mathbf{C} 的 \mathbf{x}_n 与 $-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{b}$ 的曼哈顿距离, 由于距离是非负的, 因此最小化距离等价于距离为 0, 因此上述优化问题的解为 $\mathbf{x}_n^{(m+1)} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{b}$. 需要注意的是当每个时间窗的频率系数数量 K 大于每个时间窗的窗长 M 时, 矩阵 $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ 是不满秩的, 但恰当地选取 ρ 可以保证 \mathbf{C}^{-1} 的存在^[9].

(2) z 更新过程

z 的更新不涉及代价函数和惩罚函数, 因此 z 的更新式可以写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(m+1)} &= \arg \min_{\mathbf{z}} \sum_{n=1}^N \lambda_n^{(m)\top} (\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1} - \mathbf{w}_n^{(m)}) \\ &\quad + \alpha_n^{(m)\top} (\mathbf{z}_n - \mathbf{x}_n^{(m+1)}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1} - \mathbf{w}_n^{(m)}\|_2^2 \\ &\quad + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{z}_n - \mathbf{x}_n^{(m+1)}\|_2^2 \end{aligned} \quad (10)$$

将上式中的线性项和平方项进行化简合并, 可得下式:

$$\mathbf{z}^{(m+1)} = \arg \min_{\mathbf{z}} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1} - \mathbf{a}_n\|_2^2 + \|\mathbf{z}_n - \mathbf{b}_n\|_2^2 \quad (11)$$

其中: $\mathbf{a}_n \triangleq \mathbf{w}_n^{(m)} - \lambda_n^{(m)}/\rho$, $\mathbf{b}_n \triangleq \mathbf{x}_n^{(m+1)} - \alpha_n^{(m)}/\rho$, 为了简化表示, 分别定义 z, a, b 的矩阵化版本为 $\mathbf{Z}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Z}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都为长度为 $N \times K$ 的列向量. 另外定义矩阵 $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{KN \times KN}$, 其主对角线为 N 个 $K \times K$ 的单位矩阵, 次对角线为 $N-1$ 个 $K \times K$ 的负单位矩阵, 则矩阵化版本的 $\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}$ 可以定义为 $\text{vec}(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}) \triangleq \mathbf{G}\mathbf{Z}$, 使用矩阵化版本 $\mathbf{Z}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ 后, 优化问题可以写为:

$$\mathbf{Z}^{(m+1)} = \arg \min_{\mathbf{Z}} \|\mathbf{G}\mathbf{Z} - \mathbf{A}\|_2^2 + \|\mathbf{Z} - \mathbf{B}\|_2^2 \quad (12)$$

使用标准的平方最小化技术, 上式可以得到闭式解:

$$\mathbf{Z}^{(m+1)} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{G}^T \mathbf{A} + \mathbf{B}) \quad (13)$$

求矩阵 $\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \mathbf{I}$ 的逆会随着 N 和 K 的增大耗费更多的计算资源导致运行时间增大. 因此利用矩阵 $\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \mathbf{I}$ 具有块对角的结构, 使用文献[12]所述的 BT 算法可以有效解决式(13)的优化问题, 该算法有效降低了求 $NK \times NK$ 矩阵逆的计算复杂度.

(3) w 更新过程

w 的更新式如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(m+1)} &= \arg \min_{\mathbf{w}} \beta \varphi(\mathbf{w}) \\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n^{(m)\top} (\mathbf{z}_n^{(m)} - \mathbf{z}_{n-1}^{(m)} - \mathbf{w}_n) \right) \\ &\quad + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{z}_n^{(m)} - \mathbf{z}_{n-1}^{(m)} - \mathbf{w}_n\|_2^2 \end{aligned} \quad (14)$$

将上式中的线性项和平方项进行化简合并, 同时用 Frobenius 范数的平方和代替 ℓ_2 范数的平方和可得下式:

$$\mathbf{w}^{(m+1)} = \arg \min_{\mathbf{w}} \frac{2\beta}{\rho} \varphi(\mathbf{w}) + \|\mathbf{w} - (\mathbf{q} + \frac{\lambda^{(m)}}{\rho})\|_F^2 \quad (15)$$

其中 \mathbf{q} 矩阵的第 n 列为 $\mathbf{q}_n \triangleq \mathbf{z}_n^{(m)} - \mathbf{z}_{n-1}^{(m)}$, 这个更新可以以较低复杂度用矩阵软阈值法求解^[13,14].

4 数据仿真分析结果

4.1 仿真信号谱分析

根据文献[4]重建一个仿真信号分别使用短时傅立叶变换和谱寻求的方法进行时频分析. 该信号是一个典型的时域连续频率稀疏的非平稳信号, 它由两个

相邻频率的幅度调制信号相加构成,其中一个调制信号为余弦幂函数,另一个调制信号为指数函数.该信号由下式给出:

$$y(t) = 10\cos^8(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_1 t) + 10\exp(4(t-T)/T) \cos(2\pi f_2 t) + v(t)$$

其中 $f_0 = 0.1\text{Hz}$, $f_1 = 11\text{Hz}$, $f_2 = 12\text{Hz}$, 采样时间 $T = 500\text{s}$, 采样频率 $f_s = 125\text{Hz}$, $v_n \sim N(0, \sigma^2)$ 是独立同分布的高斯白噪声.图 2 为仿真信号的时域波形图,可以看到其是包络呈指数增长的信号.

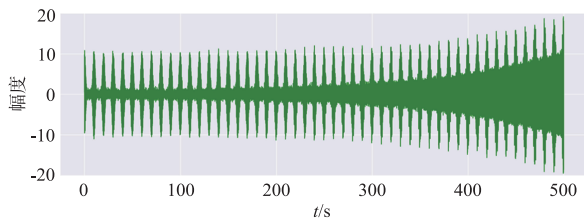


图1 仿真信号时域波形图

首先用短时傅里叶变换对该时域信号进行时频分析,短时傅里叶变换采用的时间窗为汉明窗,其中每个时窗内短时傅里叶变换的点数为 256,无窗口重叠.再使用谱寻求法对信号进行时频分析,其中每个时间窗待求的频率系数数量设为 256,无窗口重叠,拉格朗日惩罚参数 $\rho = 100$,正则化常数 $\beta = 4000$,ADMM 最大迭代次数设置为 400.图 2 为分别使用短时傅里叶变换和谱寻求法对信号进行时频分析的时频图.

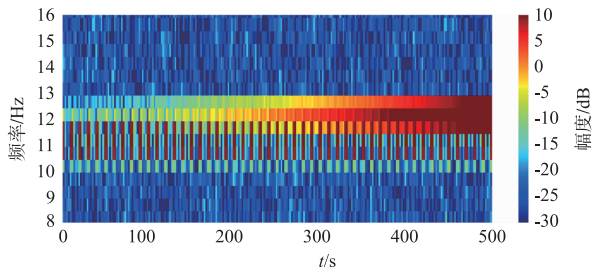


图2 短时傅里叶分析的时频图

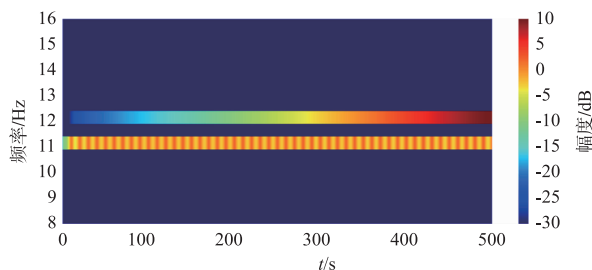


图3 谱寻求法分析的时频图

对图 2 和图 3 进行对比分析,采用短时傅里叶变换分析的时频图在相邻两个载波频率之间存在着明显的谱泄露,这是由于窗函数频谱影响了信号真实频谱,显著降低了该信号时频谱的频率分辨率,且噪声的加入

也对频谱的分辨率造成了一定影响.而使用谱寻求法分析的时频图,在相邻两个随时间变化的载波频率之间有非常明显的区分,且频谱更加光滑,清晰地反映了信号频率随时间的动态变化.与短时傅里叶变换分析的时频图相比,谱寻求法分析的时频图不仅提高了频率分辨率,同时抑制了噪声.谱寻求优化模型可以抑制噪声的原因在于惩罚函数的加入,由于噪声的时频分布的先验是不符合本文惩罚函数的假设的,因此通过加大惩罚函数在目标函数中的比重可以抑制噪声.

4.2 EEG 数据谱分析

脑电信号属于典型的非平稳信号,本文对脑电信号的 α 波段进行分析, α 波段频率为 $8 \sim 13\text{Hz}$ (平均数为 10Hz),它是正常人脑电波的基本节律,人在清醒、安静并闭眼时该节律最为明显,睁开眼睛(受到光刺激)或接受其它刺激时, α 波即刻消失^[15].使用由文献[16]开发的粘性柔性传感器收集的一段 EEG 信号分别使用上述两种方法进行谱分析.信号的采样频率为 500Hz ,所分析的脑电信号为 30s ,其中前 10s 被测人的眼睛是睁开的,后 20s 其眼睛是闭着的.因此对应信号的时频图应为前 10s α 频段信号很弱,后 20s 后 α 波段的信号强度会显著增强.但是从其时域图无法区别人睁闭眼的状态变换,图 4 为采集的脑电信号的时域波形图.

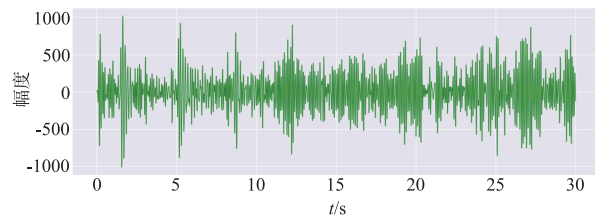


图4 脑电信号时域波形图

首先用短时傅里叶变换分析该信号的频谱,短时傅里叶变换采用汉明窗,每个时窗内短时傅里叶变换的点数为 1024,50% 的窗口重叠,再使用谱寻求法分析信号的频谱,其中每个时间窗待求频率系数的数量设为 1024,分析窗窗口长度设为 512,拉格朗日惩罚参数 $\rho = 500$,正则化常数 $\beta = 150000$,ADMM 最大迭代次数为 200.图 5、6 为两种方法的时频分析图.

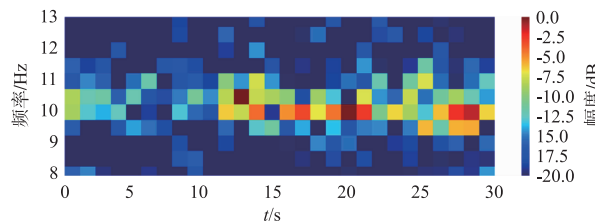


图5 短时傅里叶分析的时频图

对比图 5 和图 6,可以清楚地看到,由于两种方法采用的分析窗长度相同,时间分辨率相同,但是在频率

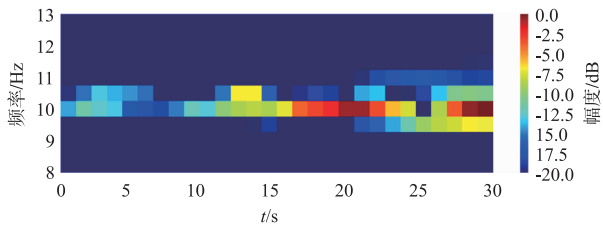


图6 谱寻求法分析的时频图

分辨率上,短时傅里叶变换的谱分析存在着明显的谱泄露问题,而使用谱寻求法分析的时频图更加平滑,很好地抑制了噪声,提高了频率分辨率,且可以清楚地区分出 10s 前后 α 波段的信号强度. 因此该谱分析法很好地捕获了 α 波段在人睁眼闭眼前后的谱变化特征. 由于使用后者分析的频谱不受测不准原理的限制,因此可以通过进一步缩短分析窗长度来提高时间分辨率而频率分辨率保持不变,图 7 为将分析窗长度改为 256 时,使用谱寻求法分析的时频图.

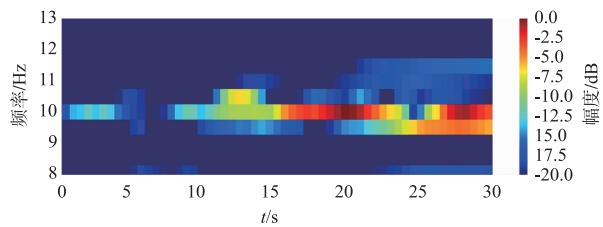


图7 缩短分析窗后谱寻求法分析的时频图

分析图 7,可以看到谱寻求法分析的时频图在不改变频率分辨率的情况下提高了时间分辨率,这更加有利于对信号的时频分析. 另外选取了 10s 前后在 10Hz 处频谱能量的比值作为指标判断人睁闭眼的状态变化,分别对两种方法分析的频率计算其值,设该值为 R , 10s 前后一个时间窗内 10Hz 处的能量分别为 P_1 和 P_2 , 即通过下式进行计算:

$$R = \frac{P_1}{P_2} \quad (16)$$

理论上这个比值应该越小越好,因为在人睁闭眼前后 α 波段中 10Hz 处的频谱能量会有显著的变化,而谱泄露会使 10Hz 处的频谱能量扩散到其相邻频谱上,从而导致能量变化减小,相应的 R 值增大. 用 R_1 和 R_2 分别表示两种方法对应的比值,经过计算, $R_1 = 0.88$, $R_2 = 0.22$, 这个结果说明了使用谱寻求法分析的频谱图更好地抑制了谱的泄露,更加有利用通过频率的方法区分脑电信号中人睁闭眼的变化.

5 算法收敛性分析

根据文献 [17], 当原始残差和对偶残差的范数收敛到 0 时, 优化问题会得到最优解. 以下分别是本文优化问题的原始残差和对偶残差的定义, 其中两个原始

残差定义为: $\mathbf{r}_1^{(i)} = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{z}^{(i)}$, $\mathbf{r}_2^{(i)} = \mathbf{w}^{(i)} - g(\mathbf{z}^{(i)})$, 两个对偶残差定义为: $\mathbf{s}_1^{(i)} = \rho g(\mathbf{w}^{(i)} - \mathbf{w}^{(i-1)})$ 及 $\mathbf{s}_2^{(i)} = \rho(\mathbf{z}^{(i)} - \mathbf{z}^{(i-1)})$. 其中 $g(\mathbf{z}^{(i)})$ 表示 $\mathbf{z}^{(i)} = \mathbf{z}_n^{(i)} - \mathbf{z}_{n-1}^{(i)}$ 这个函数, $g(\mathbf{w}^{(i)} - \mathbf{w}^{(i-1)})$ 也是类似的. 在实际中, 当原始残差和对偶残差小于等于相应的偏差阈值时, 就会说明算法的收敛. 既对于 $j \in \{1, 2\}$, 有 $\|\mathbf{r}_j^{(i)}\|_F \leq \varepsilon_j^{\text{pri}}$, $\|\mathbf{s}_j^{(i)}\|_F \leq \varepsilon_j^{\text{rel}}$. 原始残差和对偶残差的偏差阈值分别定义如下:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^{\text{pri}} &= \varepsilon^{\text{rel}} \max \{ \|\mathbf{x}^{(i)}\|_F, \|\mathbf{z}^{(i)}\|_F \} + \varepsilon^{\text{abs}} \sqrt{KN} \\ \varepsilon_2^{\text{pri}} &= \varepsilon^{\text{rel}} \max \{ \|\mathbf{w}^{(i)}\|_F, \|g(\mathbf{z}^{(i)})\|_F \} + \varepsilon^{\text{abs}} \sqrt{KN} \\ \varepsilon_1^{\text{dual}} &= \varepsilon^{\text{rel}} \|\boldsymbol{\lambda}^{(i)}\|_F + \varepsilon^{\text{abs}} \sqrt{KN} \\ \varepsilon_2^{\text{dual}} &= \varepsilon^{\text{rel}} \|\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\|_F + \varepsilon^{\text{abs}} \sqrt{KN} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中 ε^{rel} 和 ε^{abs} 分别称为相对容忍度与绝对容忍度, 两者的值都设为 0.0001. 图 8 为上一部分的仿真信号使用本文提出方法分析频谱的各个残差的收敛情况图, 在图中, 纵轴为各个残差范数的对数值, 用 r 表示, 横轴为迭代次数, 用 i 表示.

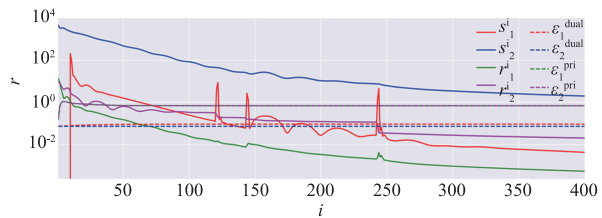


图8 残差收敛图

由图 8 分析可得: 三个残差的范数在迭代 400 次后都小于了相应的偏差阈值, 只有 $\mathbf{s}_2^{(i)} = \rho(\mathbf{z}^{(i)} - \mathbf{z}^{(i-1)})$ 这个残差范数没有下降到对应的偏差阈值以下, 但是可以看出其值随着迭代次数的增加是逐渐下降的, 只是下降速度较慢, 根据其变化趋势, 可以判断其值在足够迭代次数后可以小于等于相应的偏差阈值. 下表为各次迭代次数后经典 ADMM 算法和部分平行 ADMM 算法求解谱寻求问题后的两个原始残差在各次迭代后的数值.

表 1 两种算法各次迭代后的原始残差表

迭代次数	平行		交替	
	\mathbf{r}_1	\mathbf{r}_2	\mathbf{s}_1	\mathbf{s}_2
10	1.2627	4.0672	1.0700	3.8022
20	0.4837	1.1015	0.4106	0.7046
30	0.3169	0.9185	0.2814	0.9881
40	0.2258	0.7989	0.1819	0.4804
50	0.1553	0.4510	0.1323	0.5881

表 1 中第一列代表迭代次数, 第二列和第三列分别代表部分平行 ADMM 算法求解谱寻求问题后的两个原始残差, 第三列和第四列分别代表经典 ADMM 算法求

解谱寻求问题后的两个原始残差. 由表中数据可得, 从第 10 次迭代到 50 次迭代, 两种方法对应的两种范数的差值整体上逐渐减少, 说明了部分平行 ADMM 算法同经典 ADMM 算法一样取得了相同的收敛率.

6 结语

使用部分平行 ADMM 求解谱寻求优化问题的时频分析方法是依据统计学的思想, 通过求解正则化模型得到原问题最大后验概率的解. 与短时傅里叶的时频分析方法相比, 它避免了信号加窗造成的频谱泄露问题, 从而提高了信号时频分析的频率分辨率. 同时也突破了测不准原理的限制, 可以在保证信号频率分辨率不变的情况下提高时频谱的时间分辨率. 另外由于谱寻求惩罚函数的选取使信号频谱的时间连续性得到了保证, 从而使分析后的频谱更加平滑, 更加逼近信号的真实频谱. 时间连续性和频率稀疏性是 EEG 信号, 神经刺激信号, 语音信号等信号时频谱的共同特征, 因此可以将谱寻求法应用于多类信号的高分辨分析中. ADMM 是机器学习中分布式优化的重要算法, 因此, 部分平行 ADMM 算法为利用机器学习思想大规模进行时频分析问题的分布式和并行化提供了技术支撑和理论保证.

参考文献

- [1] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2015. 286 – 287.
Zhang Xian-da. Modern Signal Processing [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2015. 286 – 287. (in Chinese)
- [2] Purdon PL, Pierce ET, Mukamel EA, et al. Electroencephalogram signatures of loss and recovery of consciousness from propofol[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2013, 110(2): E1142 – E1151.
- [3] Wu Z, Huang NE. Ensemble empirical mode decomposition: A noise-assisted data analysis method[J]. Advances in Adaptive Data Analysis, 2009, 1(1): 1 – 41.
- [4] Ba D, Babadi B, Purdon PL. Robust spectrotemporal decomposition by iteratively reweighted least squares[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2014, 111(50): E5336 – E5345.
- [5] Ziniel J, Potter LC, Schniter P. Tracking and smoothing of time-varying sparse signals via approximate belief propagation[J]. Signals, Systems & Computers, 2010, 45(2): 808 – 812.
- [6] Adam Charles, Aurele Balavoine, Christopher Rozell. Dynamic filtering of time-varying sparse signals via l_1 minimization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 64(21): 5644 – 5656.
- [7] Charles A, Asif M S, Romberg J. Sparsity penalties in dynamical system estimation[A]. Barbara A Sullivan. 2011 45th Annual Conference on Information Sciences and Systems[C]. Baltimore, MD, USA: IEEE, 2011. 1 – 6.
- [8] Hastie T, Tibshirani R, Wainwright M. Statistical Learning with Sparsity[M]. Boca Raton: CRC press, 2015.
- [9] Schamberg Gabriel, Ba Demba, Wagner Mark. Efficient low-rank spectrotemporal decomposition using ADMM[A]. 2016 IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP)[C]. Palma de Mallorca, Spain: IEEE, 2016. 1 – 5.
- [10] Schamberg Gabriel, Ba Demba, Coleman Todd. A modularized efficient framework for non-markov time series estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(12): 3140 – 3154.
- [11] 周志华. 机器学习[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016. 132 – 133.
Zhou Zhi-hua. Machine Learning [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2016. 132 – 133. (in Chinese)
- [12] Aleksandr Y Aravkin, James V Burke. Compressed Sensing & Sparse Filtering[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. 237 – 280.
- [13] Shiqian Ma, Donald Goldfarb, Lifeng Chen. Fixed point and Bregman iterative methods for matrix rank minimization[J]. Mathematical Programming, 2011, 128(1 – 2): 321 – 353.
- [14] Tibshirani R, Saunders M, Rosset S, et al. Sparsity and smoothness via the fused lasso[J]. Journal of the Royal Statistical Society, 2005, 67(1): 91 – 108.
- [15] 韩清鹏. 利用 EEG 信号的小波包变换与非线性分析实现精神疲劳状态的判定[J]. 振动与冲击, 2013, 32(2): 182 – 187.
Han Qing-peng. Evaluation of human mental stress states based on wavelet package transformation and nonlinear analysis of EEG signals [J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(2): 182 – 187. (in Chinese)
- [16] Kang DY, Kim YS, Ornelas G, et al. Scalable microfabrication procedures for adhesive – integrated flexible and stretchable electronic sensors[J]. Sensors, 2015, 15(9): 23459 – 23476.
- [17] Boyd S, Parik N, Chu E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations and Trends in Machine Learning, 2011, 3(1): 1 – 122.

作者简介



胡园园(通信作者) 女,1993 年生于山西大同,现为北京信息科技大学硕士研究生. 主要研究方向为信号处理,大数据处理.
E-mail:huyuan0712@163.com



罗倩 女,1965 年生于山西太原,现为北京信息科技大学副教授,硕士生导师. 主要研究方向为信号与信息处理,大数据处理.
E-mail:luoqian@bistu.edu.com



段中钰 男,1977 年生于黑龙江鹤岗,现为北京信息科技大学副教授,硕士生导师. 主要研究方向为信号与信息处理,数据挖掘.
E-mail:duanzhongyu@bistu.edu.cn